

**КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА ПО КУРСУ «ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА И ПРМЗ»
ДЛЯ СТУДЕНТОВ 4 КУРСА ОЗО**

Вариант 1.

1. Дан ромб $ABCD$ с диагоналями $AC = 24$ и $BD = 10$. Проведена окружность радиуса $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ с центром в точке пересечения диагоналей ромба. Прямая, проходящая через вершину B касается этой окружности и пересекает прямую CD в точке M . Найдите CM .
2. Окружность, построенная на медиане BM равнобедренного треугольника ABC как на диаметре, второй раз пересекает основание BC в точке K .
 - а) Докажите, что отрезок BK больше отрезка CK .
 - б) Пусть указанная окружность пересекает сторону AB в точке N . Найдите AB , если $BK = 24$ и $BN = 23$.
3. Две окружности пересекаются в точках P и Q . Прямая, проходящая через точку P , второй раз пересекает первую окружность в точке A , а вторую — в точке D . Прямая, проходящая через точку Q параллельно AD , второй раз пересекает первую окружность в точке B , а вторую — в точке C .
 - а) Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм.
 - б) Найдите отношение $CP : PB$, если радиус первой окружности втрое больше радиуса второй.
4. В прямоугольнике $ABCD$ $AB = 2$, $BC = \sqrt{3}$. Точка E на прямой AB выбрана так, что $\angle AED = \angle DEC$. Найдите AE .
5. Медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Известно, что $AC = 3MB$.
 - а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.
 - б) Найдите сумму квадратов медиан AA_1 и CC_1 , если известно, что $AC = 10$.
6. Окружность радиуса $12\sqrt{2}$ вписана в прямой угол. Вторая окружность также вписана в этот угол и пересекается с первой в точках M и N . Известно, что расстояние между центрами окружностей равно 16. Найдите MN .
7. В параллелограмме $ABCD$ известны стороны $AB = a$, $BC = b$ и $\angle BAD = \alpha$. Найдите расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников BCD и DAB .
8. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке O . Площади треугольников AOB и COD равны.
 - а) Докажите, что точки A и D одинаково удалены от прямой BC .
 - б) Найдите площадь треугольника AOB , если известно, что $AB = 13$, $BC = 10$, $CD = 15$, $DA = 24$.
9. В равнобедренную трапецию $ABCD$ с основаниями BC и AD вписана окружность. Вторая окружность, построенная на боковой стороне AB как на диаметре, второй раз пересекает большее основание AD в точке H .
 - а) Докажите, что треугольник CHD равнобедренный.
 - б) Найдите основания трапеции, если радиусы первой и второй окружностей равны соответственно 6 и 6,5.
10. В окружность вписан четырёхугольник $ABCD$, диагонали которого взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке E . Прямая, проходящая через точку E и перпендикулярная к AB , пересекает сторону CD в точке M . Известно, что $AD = 8$, $AB = 4$, угол CDB равен 60 градусов.
 - а) Докажите, что EM — медиана треугольника CED .
 - б) Найдите длину EM .

Вариант 2.

1. Окружности радиусов 11 и 21 с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются внутренним образом в точке K , MO_1 и NO_2 — параллельные радиусы этих окружностей, причём $\angle MO_1O_2 = 120^\circ$. Найдите MN .
2. Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H .
 - а) Докажите, что $\angle AHB_1 = \angle ACB$.
 - б) Найдите BC , если $AH = 21$ и $\angle BAC = 30^\circ$.
3. Диагонали AC и BD четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность, пересекаются в точке P , причём $BC = CD$.
 - а) Докажите, что $AB : BC = AP : PD$.
 - б) Найдите площадь треугольника COD , где O — центр окружности, вписанной в треугольник ABD , если дополнительно известно, что BD — диаметр описанной около четырёхугольника $ABCD$ окружности, $AB = 6$, а $BC = 6\sqrt{2}$.
4. Угол C треугольника ABC равен 60° , D — отличная от A точка пересечения окружностей, построенных на сторонах AB и AC как на диаметрах. Известно, что $BD : DC = 1 : 3$. Найдите синус угла A .
5. Точка M лежит на отрезке AB . На окружности с диаметром AB взята точка C , удаленная от точек A , M и B на расстояния 40, 29 и 30 соответственно. Найдите площадь треугольника BMC .
6. На стороне CD квадрата $ABCD$ построен равносторонний треугольник CPD . Найдите высоту треугольника ABP , проведённую из вершины A , если известно, что сторона квадрата равна 1.
7. Медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Известно, что $AC = 3MB$.
 - а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.
 - б) Найдите сумму квадратов медиан AA_1 и CC_1 , если известно, что $AC = 8$.
8. В трапеции параллельно основаниям проведены четыре отрезка с концами на боковых сторонах: KL , MN , RS и TQ . Известно, что первый отрезок проходит через точку пересечения диагоналей трапеции, второй — делит ее на два подобных четырехугольника, третий — соединяет середины боковых сторон, четвертый разбивает трапецию на две равновеликие части.
 - а) Найдите длины этих отрезков.
 - б) Докажите, что $KL < MN < RS < TQ$.
9. Четырёхугольник $ABDC$ вписан в окружность. Прямые AB и CD пересекаются в точке P .
 - а) Докажите, что $AD \cdot BP = BC \cdot DP$.
 - б) Найдите площадь треугольника APC , если известно, что $BD = 2 \cdot AC$, а площадь четырёхугольника $ABDC$ равна 36.
10. Прямая, перпендикулярная гипотенузе прямоугольного треугольника, отсекает от него четырёхугольник, в который можно вписать окружность. Найдите радиус окружности, если отрезок этой прямой, заключённый внутри треугольника, равен 12, а косинус острого угла равен 0,6.